Sechs verschiedene numerische Darstellungen für „25 %“ – und wie man sie ineinander umrechnen kann

Patrick Wiesner, Regensburg, Karin Binder, München, Stefan Krauss, Regensburg, Nicole Steib, Regensburg, Celina Leusch, Regensburg

Zusammenfassung: *Es gibt unterschiedliche numerische Darstellungsformen von relativen Häufigkeiten wie z. B. „25 %“, „1 von 4“ oder „Jeder Vierte“, von denen jedoch nur einige in der Schule ausführlich behandelt werden. Im vorliegenden Beitrag sollen diese Darstellungsformen vorgestellt und anschließend zwei verschiedene Möglichkeiten erläutert werden, wie deren wechselseitige Umrechnungen im Unterricht thematisiert werden können. Bei beiden Varianten werden dabei die Anzahl der zu lernenden Umrechnungen reduziert, indem einmal die gewöhnlichen Brüche und einmal die natürlichen Häufigkeiten ins Zentrum gestellt werden.*

1 Einleitung

Absolute und relative Häufigkeiten sind zentrale Konzepte des Stochastikunterrichts. Außerhalb des Unterrichts finden sich dabei die unterschiedlichsten Darstellungen konkreter relativer Häufigkeiten (vgl. Tab. 1 bzw. Abb. 1).

Immer mehr Menschen in Deutschland machen sich Sorgen wegen der Erderwärmung und die meisten werden deshalb auch schon selbst aktiv: 4 von 5 sparen Treibhausgase ein so eine aktuelle Umfrage: Fast die Hälfte der Befragten fährt weniger Auto oder verzichtet sogar komplett auf Autofahrten. Auf Flugreisen verzichten 40 % und 12 % versuchen zumindest weniger zu fliegen. Jeder Dritte vermeide tierische Lebensmittel und viele Menschen sind auch zurückhaltender mit Neuanschaffungen. Auch wenn also viele Menschen aktiv versuchen Treibhausgase einzusparen, mehr als die Hälfte sieht trotzdem vor allem die Regierung und große Unternehmen in der Verantwortung etwas gegen den Klimawandel zu tun.

Abb. 1: Nachgestellte Radionachrichtenmeldung der dpa, in dem verschiedene Ausdrücke für relative Häufigkeiten vorkommen

Aus mathematischer Perspektive stellen relative Häufigkeiten *Anteile* dar. Anteile nehmen grundsätzlich Werte zwischen 0 und 1 an. Diese gibt es sowohl in *kontinuierlicher Ausprägung* (z. B. in Bezug auf Größen wie $\frac{1}{4}$ Liter oder auch $\frac{1}{4}$ der Wandfläche) als auch in *diskreter Ausprägung* (z. B. 1 von 4 Personen; die Diskretheit der „Fälle“ ergibt sich meist durch den Bezug auf konkrete Personen oder Objekte). Relative Häufigkeiten beziehen sich (im Vergleich zu Anteilen) dabei immer auf diskrete Merkmale.

Konkrete relative Häufigkeiten können auf verschiedene Arten dargestellt werden, z. B. graphisch (*Kreisdiagramm, Säulendiagramm,* etc.) oder numerisch (z. B. 25 % oder $\frac{1}{4}$). Während alle wesentlichen graphischen Darstellungsarten im schulischen Unterricht thematisiert werden, werden in der Regel nur drei numerische Schreibweisen (inklusive deren Umrechnungen) systematisch behandelt: *Prozente* (z. B. 25 %), *Dezimalbrüche* (z. B. 0,25) oder *gewöhnliche Brüche* (z. B. $\frac{1}{4}$). Es gibt jedoch noch weitere numerische Darstellungsformen für relative Häufigkeiten (unten in Tab. 1) wie beispielsweise die *„zu“-Schreibweise* (z. B. 1 zu 3), die Schreibweise *„Jeder Wievielte“* (z. B. Jeder Vierte) oder die *natürlichen Häufigkeiten* (z. B. 1 von 4).

In Abschnitt 2 fassen wir noch einmal Erkenntnisse einer Studie (Hagn 2019, bzw. Krauss et al. 2020) zusammen, in der gezeigt werden konnte, dass relative Häufigkeiten medial vor allem als *Prozente* bzw. *natürliche Häufigkeiten* oder in Form von *„Jeder Wievielte“* kommuniziert werden. *Gewöhnliche Brüche* kommen in Zeitungen dagegen nur als Zahlwörter wie „ein Achtel“ oder „die Hälfte“ vor und Dezimalbrüche zwar zur Beschreibung von Größen, aber ebenfalls nicht als relative Häufigkeiten.

Im Sinne des oft angemahnten Alltagsbezugs des Mathematikunterrichts sollten alle häufig in Medien oder Alltagssprache verwendeten Darstellungsformen von Schülerinnen und Schülern verstanden und flexibel ineinander übertragen werden können. Dass Kindern und Erwachsenen wechselseitige Umrechnungen solcher Repräsentationen leichtfallen, da sie täglich mit ihnen konfrontiert werden, wäre jedoch ein Trugschluss: So konnten bei einer repräsentativen Umfrage von 1.000 Deutschen auf die Frage „Was bedeuten 40 %?“ (mit den Antwortalternativen „Ein Viertel“, „Vier von Zehn“ oder „Jeder Vierzigste“) nur etwa die Hälfte die richtige Antwort angeben (nämlich „Vier von Zehn; Süddeutsche Zeitung 2006).

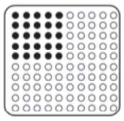
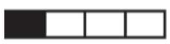
In Abschnitt 3 stellen wir deshalb zwei weitere Studien (Roidl 2015, Kümmeringer 2021) vor, die ähnliche Probleme bei derartigen Umrechnungen auch bei Schülerinnen und Schülern nachweisen, obschon diese das Thema relative Häufigkeiten auf Basis der drei schulüblichen Darstellungen (oben in Tab. 1) ausführlich behandelt hatten. Solche Befunde legen nahe, dass Darstellungen wie „1 von 4“ oder „Jeder Vierte“ in der Schule nicht nur thematisiert, sondern auch deren wechselseitige Umrechnungen – inklusive der drei schulüblichen Darstellungen – explizit behandelt werden sollten (ausführlich dazu siehe Abschn. 2).

Insgesamt ergeben sich – bei sechs Darstellungsarten (Tab. 1) und je zwei Übersetzungsrichtungen – 30 mögliche Darstellungswechsel. Ein Grund für die Schwierigkeiten, die viele Schülerinnen und Schüler mit der wechselseitigen Umrechnung haben, könnte die meist nur rudimentäre und unsystematische Einführung und Gegenüberstellung dieser Darstellungsarten in der Schule sein. Im vorliegenden Beitrag sollen 1) die numerischen Darstellungsformen von relativen Häufigkeiten, sowie deren Relevanz in Alltag und Schule erläutert werden, 2) die Notwendigkeit einer systematischen Einführung begründet werden 3) hierfür ein Zugang, bei dem *gewöhnliche Brüche* im Zentrum stehen, beschrieben werden, und 4) dieser einem Zugang auf der Basis von *natürlichen Häufigkeiten* gegenübergestellt werden.

2 Sechs zentrale numerische Darstellungsarten von relativen Häufigkeiten

Wie Tabelle 1 zu entnehmen ist, handelt es sich bei *gewöhnlichen Brüchen*, *Dezimalbrüchen* und *Prozenten* um die in der Schule standardmäßig thematisierten Darstellungsarten von relativen Häufigkeiten (die dann später auch zur Darstellung von Wahrscheinlichkeiten wieder zum Einsatz kommen). Diese werden im Folgenden nicht mehr eingeführt oder näher erläutert (zu gewöhnlichen Brüchen siehe aber z. B. Abschn. 4). *Natürliche Häufigkeiten*, die Schreibweise *„Jeder Wievielte“* und die *„zu“-Schreibweise* sind hingegen Darstellungen, die in der Schule nicht oder nur unsystematisch und wenn dann eher „zufällig“ behandelt werden.

Zunächst stellen wir die drei letzteren Schreibweisen kurz vor. Dabei gehen wir jeweils auch auf mögliche visuelle Grundvorstellungen ein, da diese in Abschnitt 4 (konkret: bei Zugang 2) noch eine entscheidende Rolle spielen werden. Entgegen den teilweise sehr facettenreichen Konzeptualisierungen des Grundvorstellungs-Begriffs in der Mathematik-Di-

	Numerische Darstellungsart		Beispiel	mögliche visuelle Grundvorstellungen	Verwendung in Medien
schulübliche Darstellungen	Prozent		25 %		sehr häufig
	Dezimalbruch		0,25	Stellentafel, Zahlenstrahl E Z H T 0 2 5 0	äußerst selten
	Bruch	gewöhnlicher	$\frac{1}{4}$	Torten-, Rechteck, oder -Streifenmodell	äußerst selten
		als Zahlwort	Ein Viertel		häufig
in der Schule unübliche Darstellungen	natürliche Häufigkeit		1 von 4	● ○ ○ ○	häufig
	„jeder Wievielte“		Jeder Vierte	○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ●	gelegentlich
	„zu“ -Schreibweise		1 : 3 („1 zu 3“)	Gegenüberstellung der Fälle ● : ○ ○ ○	selten

Tab. 1: Die sechs Darstellungsarten am Beispiel von 25 % (adaptiert nach Krauss et al. 2020)

daktik (z. B. Griesel et al. 2019) verwenden wir ihn hier lediglich in einem intuitiven Sinn.

Drei „alternative“ Darstellungsformen und zugehörige Grundvorstellungen

Natürliche Häufigkeiten

Unter *natürlichen Häufigkeiten* (Gigerenzer & Hoffrage 1995) versteht man die Kombination *zweier absoluter Häufigkeiten* mithilfe der Präposition „von“ („1 von 4“), d. h. man betrachtet eine bestimmte Teilmenge innerhalb einer größeren Bezugsmenge. *Natürliche Häufigkeiten* kann man sich beispielsweise als eine endliche Menge vorstellen (z. B. von Punkten; Tab. 1), bei der eine Teilmenge spezifisch markiert ist. Eine ausführliche didaktische Auseinandersetzung mit dem Konzept der *natürlichen Häufigkeiten* findet sich in Krauss et al. (2020).

Jeder Wievielte

Die Schreibweise *„Jeder Wievielte“* ist eine Ausdrucksweise für einen Stammbruch mithilfe von Ordinalzahlen. $\frac{1}{4}$ wird beispielsweise zu *„Jeder Vierte“*. Diese Darstellungsart wird gelegentlich auch *Quasiordinalzahl* (z. B. Malle 2004) genannt (die Verwendung dieses Begriffs ist für den Unterricht in der Unterstufe aber natürlich nicht geeignet). Zu beachten ist, dass in dieser Darstellungsart jedoch nur relative Häufigkeiten dargestellt werden können, die wertgleich zu einem Stammbruch sind ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …). So lässt sich 40 % beispielsweise nicht in die *„Jeder Wievielte“-Schreibweise* bringen, da $40\,\% = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ nicht in einen Stammbruch umgewandelt werden kann. Aus dem selben Grund können auch Anteile, die größer als 0,5 sind, nicht in der *„Jeder Wievielte“-Schreibweise* dargestellt werden. Eine Menge (z. B. von Punkten in einer Reihe; Tab. 1), in der in regelmäßigen Abständen genau ein Element markiert ist, wäre eine visuelle Vorstellung zu dieser Schreibweise.

„zu“-Schreibweise

Mit der *„zu“-Schreibweise* meinen wir das Verhältnis bzw. die Gegenüberstellung der Anzahl der Fälle mit einem bestimmten Merkmal zur Anzahl der Fälle ohne dieses Merkmal. So kann die Wahrscheinlichkeit von 50 % als „1 : 1“ (sprich: *„1 zu 1“* oder „fifty-fifty“) oder die Wahrscheinlichkeit von 25 % als 1 : 3 (sprich: *„1 zu 3“*) angegeben werden (eine dieser Darstellung verwandte Ausdrucksweise ist z. B. „Auf einen Beitragszahler kommen drei Rentenbezieher“; Agra Europe 2021). Weitere interessante Überlegungen zu dieser Darstellungsart sowie zu deren Verwendung bereits in der Primarstufe sind bei Kirsche und Hohloch (2020) zu finden.

Verwendung der sechs Darstellungsformen in Schule und Alltag

Im Folgenden wenden wir uns den beiden rechten Spalten aus Tabelle 1 zu, indem wir kurz die Ergebnisse einer diesbezüglichen Studie zusammenfassen (Hagn 2019, Krauss et al. 2020). Anschließend diskutieren wir mögliche Gründe für die unterschiedliche Verbreitung der sechs Darstellungen in Medien/Alltag bzw. in der Schule.

In der Schule werden vor allem *Prozente*, *Dezimalbrüche* und *gewöhnlichen Brüche* behandelt. Die drei alternativen Darstellungsformen von relativen Häufigkeiten (Tab. 1, unten) kommen zwar gelegentlich in Schulbüchern vor, werden dabei aber meist nur unsystematisch behandelt und eher beiläufig erwähnt. Auch in Lehrplänen ist deren explizite Erwähnung derzeit noch eine Ausnahme (z. B. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung ISB 2016).

Dies ist auf den ersten Blick verwunderlich, da gerade *natürliche Häufigkeiten* und die Schreibweise *„Jeder Wievielte“* im Alltag neben *Prozentangaben* häufig auftreten (wie in einer systematischen Analyse von Zeitungen, Radio- und Fernsehsendungen gezeigt werden konnte; Hagn 2019, Krauss et al. 2020). Dagegen werden dieser Studie zufolge zur Darstellung relativer Häufigkeiten in Alltag und Medien in der Regel keine *Dezimalbrüche* oder *gewöhnlichen Brüche* (in numerischer Form) verwendet (z. B. „0,25“ oder „$\frac{1}{4}$“): Während in Zeitungen *gewöhnliche Brüche* lediglich als Zahlwort (z. B. „Ein Viertel“) vorkommen, werden *Dezimalbrüche* im Alltag fast ausschließlich für Größen (aber nicht für relative Häufigkeiten) benutzt. Ein Unterricht, der nicht darauf hinweist, dass Dezimalbrüche zwar in der Mathematik, nicht aber in Alltag und Medien zur Darstellung relativer Häufigkeiten verwendet werden, weckt hier also gegebenenfalls falsche Erwartungen bei Schülerinnen und Schülern.

Ein Grund, weshalb sowohl die Schreibweisen *natürliche Häufigkeiten*, *„Jeder Wievielte“*, die *„zu“-Schreibweise* in den Medien genutzt werden, könnten die anschaulichen mentalen Repräsentationen sein, die hierbei gedanklich aufgebaut werden können (Tab. 1).

Prozente, *Dezimalbrüche* und *gewöhnliche Brüche* sind in der Mathematik vor allem deshalb ein mächtiges und flexibel einsetzbares „Werkzeug“, da sie – im Gegensatz zu den drei alternativen Schreibweisen – nicht nur für relative Häufigkeiten verwendet werden können. Mit den drei schulüblichen Darstellungen können sowohl diskrete als auch stetige Merkmale sowie sogar negative Werte oder auch Werte, die größer als 1 sind, dargestellt werden (beispielsweise Veränderungen von 120 %). Dies ist mit *natürlichen Häufigkeiten* oder der Schreibweise *„Jeder Wievielte“* nur sehr bedingt möglich, da diese Darstellungen *nur* relative Häufigkeiten ausdrücken können (d. h. weder sind Ausdrücke der Art „10 von 8“ noch Formulierungen wie „Minus Jeder Dritte“ intuitiv interpretierbar; Krauss et al. 2020).

Mit *Prozenten*, *Dezimalbrüchen* und *gewöhnlichen Brüchen* können prinzipiell alle Rechenoperationen durchgeführt werden (vgl. Weber 2016). Mit *Dezimalbrüchen* und *gewöhnlichen Brüchen* lassen sich weiterhin bequem Größen ausdrücken (z. B. 1,5 Liter oder $\frac{1}{2}$ kg). Aber auch wenn Brüche (in ihrer formalen Schreibweise) selbstverständlich ein unverzichtbares mathematisches Werkzeug darstellen, muss man sich als Lehrkraft darüber im Klaren sein, dass sie in Medien zur Darstellung relativer Häufigkeiten – entgegen der Suggestion von Lehrplänen und Schulbüchern – unüblich sind (es gibt sogar eine Konvention von Redaktionen für Journalisten, auf gewöhnliche Brüche in Zeitungsartikeln nach Möglichkeit komplett zu verzichten; Krauss et al. 2020).

Mittlerweile gibt es eine vergleichbare Studie zu verschiedenen Darstellungen von *Wahrscheinlichkeiten*. Rolfes und Fahse (2021) untersuchten, welche numerischen Formate Schülerinnen und Schüler für deren Quantifizierung aktiv nutzen. Dabei wurden die in der Schule unterrichteten *Prozente* und *Brüche* sowie die schulisch kaum behandelten *Verhältnisse* (hierbei waren die *natürlichen Häufigkeiten* und die *„zu“-Schreibweise* zusammengefasst) in etwa gleich häufig genutzt. Die in der Mathematik übliche Darstellung als *Dezimalbrüche* wurde hingegen – wie auch schon für relative Häufigkeiten – kaum verwendet.

3 Schwierigkeiten bei der Umrechnung

Wie gut gelingt Lernenden die wechselseitige Umrechnung dieser sechs Darstellungen von relativen Häufigkeiten? Bezüglich dieser Kompetenz wurden im Rahmen einer Abschlussarbeit 79 bayerische Schülerinnen und Schüler der sechsten und siebten Klasse (Mittel- und Realschule) untersucht (Kümmeringer 2021). Der Test bestand aus vier Aufgaben. In der ersten (geschlossenen) Aufgabe mussten die Schülerinnen und Schüler entscheiden, welche von sieben gegebenen Alternativen richtig und welche falsch sind (Tab. 2, oben). Bei den folgenden drei Aufgaben (Nr. 2–4 in Tab. 2) sollten bestimmte relative Häufigkeiten jeweils aktiv in andere Darstellungsarten umgewandelt werden (der Fragebogen wurde in drei verschiedenen Versionen ausgeteilt, diese unterschieden sich aber lediglich in den Zahlenwerten). In allen teilnehmenden Klassen waren Brüche bzw. rationale Zahlen bereits eingeführt. Es gab vor der Erhebung keinerlei Erklärungen zu den verschiedenen Darstellungsformen. Es zeigte sich, dass bei der ersten Aufgabe die Lösungsraten bei oder nur knapp über der Ratewahrscheinlichkeit lagen. Der aktive Wechsel von einer Darstellungsform in eine andere in den Aufgaben 2 bis 4 gelang den Studienteilnehmenden ebenfalls nicht zufriedenstellend. Diese Ergebnisse geben Hinweise darauf, dass Umrechnungen der Darstellungsarten für Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen alles andere als trivial sind. Bei der Analyse der falschen Antworten waren dabei drei Punkte besonders auffällig:

1) Bei der Umwandlung der Schreibweise *„Jeder Wievielte“* (vgl. Aufgabe 2) wurde die Ordinalzahl direkt – statt ihrem Kehrwert – für die Lösung genutzt (z. B. „Jeder Zwanzigste“ entspricht 20 % oder „Jeder Fünfte“ entspricht 5 % oder auch 50 %).

2) Bei der Umwandlung einer *natürlichen Häufigkeit* in die *„zu“-Schreibweise* wurde (vgl. Aufgabe 3b) oft „a von b“ und „a zu b“ gleichgesetzt (z. B. „4 von 6“ entspricht „4 zu 6“ bzw. „12 zu 18“). Diese Aufgabe wurde interessanterweise von keiner einzigen Versuchsperson korrekt bearbeitet.

3) Die einzige Aufgabe (Aufgabe 4) mit konkret vorgegebenen Merkmalsträger und Kontext (z. B. Freiwürfe beim Basketball) wurde von allen halboffenen Aufgaben am besten gelöst.

Diese Beobachtungen legen nahe, dass bei einer Vermittlung der verschiedenen Schreibweisen auch die Vorstellungen hinter diesen konkret erläutert und diese auch explizit voneinander abgegrenzt werden sollten (z. B. Unterschied der Präposition „von“ und „zu“).

Eine Vorläuferstudie (Examensarbeit von Roidl 2015) hatte bereits ähnliche Resultate erbracht: Es konnten nur 129 von 227 (56,8 %) Schülerinnen und Schüler aus Gymnasium und Mittelschule den Ausdruck „Jeder Vierte“ in eine *Prozentangabe* umwandeln. Den Ausdruck „20 %“ konnten 67 % der Befragten nicht

Aufgabe				Performanz	Bemerkung
1) Was bedeutet 40 %?					
	Aussage	**wahr**	**falsch**		
a)	Einer Chance von „4 zu 10“	☐	☒	43 %	Performanz (d.h. Anteil der richtigen Kreuze) der Schülerinnen und Schüler entsprach in etwa der Ratewahrscheinlichkeit von 50 %
b)	2/5	☒	☐	48 %	
c)	Ein Vierzigstel	☐	☒	54 %	
d)	Vierhundert von Tausend	☒	☐	66 %	Performanz der Schülerinnen und Schüler lag signifikant über der Ratewahrscheinlichkeit von 50 %.
e)	4 von 10	☒	☐	68 %	
f)	Jeder Vierzigste	☐	☒	71 %	
g)	0,4	☒	☐	78 %	
2) Bitte übertrage die Angabe „jeder Fünfte“					
a) … in eine entsprechende Prozentangabe: 20 %				18 %	häufig fälschlich Angaben, die Ordinalzahl „übernehmen“ (z.B. **5** % oder **5**0 % bei „jeder **Fünfte**“)
b) … in einen gewöhnlichen Bruch (z.B. $^1/_2$): $\frac{1}{5}\left(=\frac{20}{100}=\frac{2}{10}\right)$				25 %	
3) Fülle folgende Lücken aus: „4 von 6“ entsprechen					
a) „12 von 18“				38 %	„a von b“ und „a zu b“ wurden häufig gleichgesetzt
b) „Eine Chance von 4 zu 2“				0 %	
4) Vervollständige folgenden Satz:					
Patrick hat zwei von zehn Freiwürfen beim Basketball getroffen. Er hat also *jeden* fünften Wurf getroffen.				47 %	Dieses Item wurde von den halboffenen Fragen am besten gelöst (47% richtige Lösungen).

Tab. 2: Aufgaben (der Version A) mit insgesamt niedrigen Lösungsraten über alle drei gestellten Versionen; die korrekten Lösungen sind jeweils handschriftlich ergänzt

den fünf gegebenen möglichen alternativen Schreibweisen richtig zuordnen.

Beide Studien weisen auf einen großen Bedarf hin, sowohl die schulüblichen als auch die in der Schule nicht systematisch behandelten Darstellungsarten sowie deren Zusammenhang gezielt zu unterrichten. Zwei Möglichkeiten, wie diese wechselseitigen Umwandlungen in der Schule thematisiert werden könnten, sollen im Folgenden dargestellt werden.

4 Zwei Zugänge zur Umrechnung

Prinzipiell kann gerade der Wechsel von mathematischen Darstellungsformen besonders fruchtbares Lernen bedeuten. Eine Behandlung *aller* 30 Umrechnungen ist aber unserer Ansicht nach wenig zielführend. Ziel sollte lediglich sein, dass Schülerinnen und Schüler sicher von einer Darstellungsform zu jeder anderen gelangen können und dadurch flexibel mit diesen umgehen können. Umwege über andere Darstellungsformen sind hier gerne erlaubt – ja sogar als Strategie erwünscht.

Die Umrechnung von *Prozenten*, *gewöhnlichen Brüchen* und *Dezimalbrüchen* wird in der Schule ausführlich behandelt. Die gegenseitige Umrechnung von *Prozenten* in *Dezimalbrüche* ist z. B. durch die Regel des „Kommaverschiebens“ einfach. Die Darstellungswechsel zwischen *Dezimalbrüchen*, bzw. *Prozenten* und *gewöhnlichen Brüchen* sind wiederum durchaus anspruchsvoll, werden aber in der Schule im Rahmen der Bruchrechnung eingehend unterrichtet (z. B. Division des Zählers durch den Nenner oder über Zehnerbrüche). Diese (bekannten) Umrechnungen sind in Abbildung 2 und Abbildung 3 mit a), b) und c) gekennzeichnet. Im Rahmen der beiden im Folgenden beschriebenen Zugänge wird vor allem jeweils die rechte Seite von Abbildung 2 und 3 fokussiert, da hier aufgrund der Diskrepanz zwischen Schule und Alltag die eigentliche didaktische Lücke besteht.

Im ersten Zugang werden die *gewöhnlichen Brüche* in den Mittelpunkt gestellt (weshalb dieser auch als Vertiefung der Bruchrechnung angesehen werden kann). Beim zweiten Zugang werden hingegen die *natürlichen Häufigkeiten* sowie deren möglichen Grundvorstellungen fokussiert. Der zweite Zugang ist verständnisorientierter als der erste Zugang angelegt (für Verständnisorientierung versus Kalkülorientierung siehe z. B. Prediger 2009). Die Grundidee beider Zugänge ist also nicht die direkte Instruktion von allen potentiell möglichen Umrechnungen. Es wird vielmehr empfohlen, zunächst jeweils einen Zwischenschritt auf eine „sichere Brücke“ zu gehen, um zugrunde liegende Prinzipien zu verstehen.

Da *gewöhnliche Brüche* das Zentrum des ersten Zugangs sind und beim zweiten Zugang – bei dem die *natürlichen Häufigkeiten* im Zentrum stehen – zumindest noch die „zweitwichtigste“ Darstellung sind, folgen zunächst einige allgemeine Bemerkungen zu Brüchen. Im Standardwerk *Didaktik der Bruchrechnung* beschreiben Padberg und Wartha (2017) die Diskussionen um die Bruchrechnung in der Schule aufgrund der geringen Relevanz der *gewöhnlichen*

Brüche in Alltag und Berufsleben (was durch die erste der beiden oben beschriebenen Studien noch einmal gestützt wird). Dort werden zunächst einige häufig genannte Argumente gegen die umfassende Thematisierung der Bruchrechnung in der Schule zusammengefasst, anschließend jedoch stärkere Argumente für deren ausführliche Behandlung im Unterricht ausgeführt. Die wichtigsten Argumente für eine ausführliche Behandlung sind neben der anschaulichen Vorstellung zum Rechnen mit nicht-ganzzahligen Zahlen die *Gleichungslehre* und die *Zahlbereichserweiterung* der natürlichen Zahlen. Auch die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* wird genannt, da man häufig Ausgangssituationen aus den Lösungen rekonstruieren kann, wenn dabei *gewöhnliche Brüche* verwendet wurden. So erkennt man bei einem Urnenexperiment an der Gleichung $P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$, dass es ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen war, da der Nenner, der die Anzahl der Kugeln angibt, beim zweiten Faktor um 1 reduziert ist. Darüber hinaus werden gewöhnliche Brüche zur Erarbeitung der Pfadregeln gegenüber *Dezimalbrüchen* oder *Prozenten* präferiert. Im selben Sinne fordert Heckmann (2005), dass die *gewöhnlichen Brüche* ausführlich im Unterricht behandelt werden sollen, da ein sicherer Umgang mit *gewöhnlichen Brüchen* wiederum den Umgang mit *Dezimalbrüchen* positiv beeinflusst.

Gewöhnliche Brüche eignen sich auch gut für Berechnungen. So lässt sich die Frage „Wie groß ist der Anteil der Kinder, die Fußball oder Handball als Lieblingssport angegeben haben, wenn jedes dritte Kind Fußball und jedes siebte Kind Handball als seine Lieblingssportart angibt?“ leicht durch eine Umwandlung in *gewöhnliche Brüche* und anschließender Bruchrechnung beantworten: „Jeder Dritte“ entspricht $\frac{1}{3}$ und „Jeder Siebte“ entspricht $\frac{1}{7}$. Somit ergibt sich als Anteil $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{7}{21} + \frac{3}{21} = \frac{10}{21}$. In der *„Jeder Wievielte“-Schreibweise* ist die Berechnung hingegen nicht möglich. Die Rechnung wäre auch mithilfe von *Dezimalbrüchen* oder *Prozenten* möglich. Hierbei ist aber aufgrund der auftretenden Periode ($0{,}\overline{3}$, bzw. $0{,}\overline{142857}$) die Berechnung aufwändiger und der Rechenweg nicht mehr so leicht nachvollziehbar.

Ein Ergebnis der Untersuchung von Rolfes und Fahse (2021), nämlich dass der kompetente Umgang mit *gewöhnlichen Brüchen* und die richtige Lösungsfindung bei Aufgaben zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten zusammenhängt, könnte ebenfalls durch die zentrale Stellung der *gewöhnlichen Brüche* begründet sein.

Zugang 1: „Brücke durch Brüche“

Zunächst betrachten wir einen Zugang (Abb. 2), bei dem die *gewöhnlichen Brüche* die Funktion als „Brücke der Umrechnung“ zwischen den Darstellungsformen haben. Mit diesem Zugang braucht man nicht mehr alle möglichen 30 Wechsel explizit zu betrachten, die Darstellungsformen können vielmehr durch den „Umweg“ über die *gewöhnlichen Brüche* ineinander überführt werden. Eine Ausnahme bildet hierbei lediglich die oben genannte Regel des „Kommaverschiebens“ bei der Umrechnung der *Prozente* in *Dezimalbrüche* (die natürlich direkt möglich ist). Beim vorgeschlagenen Umweg über *gewöhnliche Brüche* reduzieren sich die 30 Umrechnungen dann auf insgesamt zwölf (Abb. 2).

Die Umrechnungen a), b) und c) in Abbildung 2 sind die aus der Schule bekannten Darstellungswechsel, die hier nicht noch einmal extra aufgegriffen werden. Die zwölf Umrechnungen reduzieren sich bei Einschränkung auf die rechte Seite dann auf sechs. Diese können dann wiederum auf insgesamt drei Prinzipien zurückführen lassen (siehe Algorithmus in Tab. 3), die dann jeweils in zwei Richtungen durchgeführt werden (vgl. die jeweils zwei Pfeile bei 1, 2, 3).

Für eine konkrete Umwandlung zweier der drei rechtsstehenden Darstellungen (Abb. 2) ineinander sind dabei zwei Schritte erforderlich: Zuerst der Zwischenschritt von der Ausgangsdarstellung „auf die Brücke“ der *gewöhnlichen Brüche* und dann anschließend nach rechts zurück zur Zieldarstellung. Möchte man z. B. eine Angabe in *natürlichen Häufigkeiten* („5 von 6“) in der *„zu“-Schreibweise* darstellen, wird das Ergebnis nach Zugang 1 nicht direkt ermittelt, sondern zuerst der *Bruch* $\frac{5}{6}$ gebildet und dieser dann mit dem gelernten Prinzip in die Darstellung „5 zu 1“ gebracht (vgl. Tab. 3 drittes Prinzip).

Auch der Wechsel zur „anderen Seite“ (zu den schulüblichen Darstellungen) geht über die *gewöhnlichen Brüche*: Möchte man nun beim obigen Beispiel von der *„zu“-Schreibweise* („5 zu 1“) zu den *Prozenten* gelangen, geht man erst zu den *gewöhnlichen Brüchen* $\left(\frac{5}{6}\right)$ zurück. Im zweiten Schritt wandelt man diesen dann mit den im Unterricht behandelten Methoden (z. B. Division des Zählers durch den Nenner) schließlich in die *Prozentangabe* „$83{,}\overline{3}$ %“.

Insgesamt müssen die Lernenden, um alle 30 Umrechnungen zu beherrschen, dann nur noch drei Prinzipien lernen. Angaben, die auswendig in allen Formen dargestellt werden können, bilden dabei Aus-

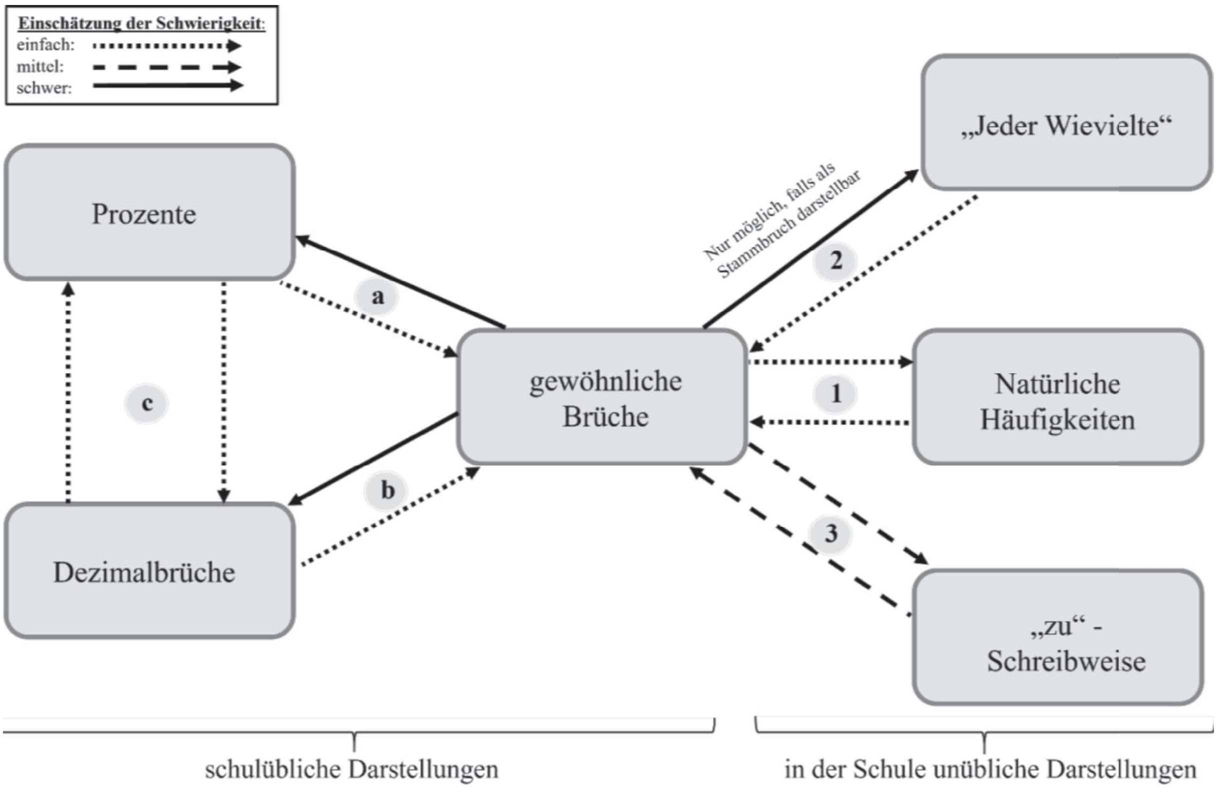


Abb. 2: Zugang 1 – Umrechnung über die Brücke der gewöhnlichen Brüche

nahmen (z. B. 50 % = „Jeder Zweite“ = „1 zu 1“ = „fifty-fifty).

Wie sind wir zu den Einschätzungen der jeweiligen Schwierigkeiten (rechts in Tab. 3) gekommen? Die Umrechnung (1) zwischen den *gewöhnlichen Brüchen* und den *natürlichen Häufigkeiten* ist vergleichsweise einfach. Bei der Umwandlung eines Bruchs wird der Zähler zur ersten Komponente und der Nenner zur zweiten Komponente der *natürlichen Häufigkeit*. Die Rückrichtung erfolgt analog. Beim Darstellungswechsel (2) zwischen *gewöhnlichen Brüchen* und der Schreibweise *„Jeder Wievielte“* sind beide Richtungen gesondert zu betrachten. Bei der Umwandlung der *„Jeder Wievielte“-Schreibweise* zu den *gewöhnlichen Brüchen* wird die Ordinalzahl zum Nenner des Bruchs und der Zähler stets zu 1. Die umgekehrte Richtung ist dabei nur möglich, wenn der Bruch wertgleich zu einem Stammbruch ist, andernfalls gibt es keine Entsprechung in der Schreibweise *„Jeder Wievielte“*.

Möchte man wissen, ob eine beliebige Darstellung (z. B. eine *Prozentangabe*) in der Form *„Jeder Wievielte“* darstellbar ist, kann man also immer den Weg über die *gewöhnlichen Brüche* nutzen. Hierfür wandelt man diese Darstellung erst in einen *gewöhnlichen Bruch* um und prüft anschließend, ob dieser zu einem *Stammbruch* gekürzt werden kann. Eine Schülerin oder ein Schüler überprüft bei der Umwandlung von 4 % (oder 7 %) in die Schreibweise *„Jeder Wievielte“* also, ob diese Werte als Stammbruch darstellbar sind. $4\,\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ ist als Stammbruch

	Umrechnung			Algorithmus			Schwierigkeit
1	gewöhnlicher Bruch	⟷	natürliche Häufigkeit	$\frac{x}{y}$	⟷	x von y	einfach
2	gewöhnlicher Bruch	⟷	Jeder Wievielte	$\frac{1}{x}$	⟷	Jeder x-te	mittel
				*Hinrichtung nur möglich, falls gewöhnlicher Bruch wertgleich zu einem Stammbruch ist			
3	gewöhnlicher Bruch	⟷	„zu“ - Schreibweise	$\frac{x}{y}$	⟶	x zu (y – x)	mittel
				x zu y	⟵	$\frac{x}{x+y}$	

Tab. 3: Zugang 1 – Die drei einzuführenden Prinzipien beim Zugang mit Brüchen im Zentrum

und also in der *„Jeder Wievielte“-Schreibweise* („Jeder Fünfundzwanzigste“) darstellbar. Bei $7\,\% = \frac{7}{100}$ ist dies hingegen nicht möglich.

Der Darstellungswechsel (3) von den *gewöhnlichen Brüchen* in die *„zu“-Schreibweise* erfolgt, indem man den Zähler des Bruchs als erste Komponente und die Differenz des Nenners zum Zähler als zweite Komponente wählt. Formal ausgedrückt lautet dies: $\frac{x}{y}$ wird zu „x *zu* $(y - x)$“. Die andere Richtung funktioniert analog: aus „x *zu* y“ wird $\frac{x}{x+y}$. Das Besondere ist hier, dass für beide Richtungen leicht abgewandelte Formeln verstanden werden müssen.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass sich alle 30 möglichen Umrechnungen in diesem eher kalkülorientierten Zugang mithilfe von nur drei Prinzipien durchführen lassen sich (Tab. 3).

Bei diesem Ansatz wurden die gewöhnlichen Brüche ins Zentrum gestellt, die in den ersten Jahren der Sekundarstufe I einen großen Raum im schulischen Mathematikunterricht einnehmen. Die systematische Einführung der neuen Darstellungsarten sollte dabei nicht als „zusätzlicher Mehraufwand“ gesehen werden, sondern kann aus der Perspektive von Zugang 1 sogar als eine Möglichkeit zur „Vertiefung des Bruchzahlverständnisses“ betrachtet werden, die noch dazu einen klar kompetenzorientierten Zuschnitt hat.

Zugang 2: „Brücke durch natürliche Häufigkeiten“

Zugang 2 stellt die *natürlichen Häufigkeiten* ins Zentrum und nutzt dabei explizit, dass bei einigen Darstellungsarten (z. B. *Jeder Wievielte*) gedanklich sehr intuitive Grundvorstellungen aufgebaut werden können (siehe hierzu auch Tab. 1, Mitte).

Dieser Zugang (vgl. Abb. 3) sieht in der Gesamtdarstellung etwas komplexer als Abbildung 2 aus, ist aber durch die verständnisorientierte Herangehensweise ggfs. vielleicht sogar noch intuitiver nachvollziehbar. Er beinhaltet für alle Umrechnungen die in Abschnitt 2 erläuterte Visualisierung der *natürlichen Häufigkeiten* (die sich in Tab. 4 jeweils auf der linken Seite der zweiten Spalte befindet). Kern dieses Zugangs ist es, ein tiefes Verständnis für die Darstellungsformen und deren Zusammenhänge zu schaffen, indem man zunächst die intuitiven Grundvorstellungen zu allen Darstellungen thematisiert. Aus den numerischen Schreibweisen werden in diesem Zugang also ikonische Repräsentationen, mit denen die Schülerinnen und Schüler konkret arbeiten können (weshalb die Prinzipien aus Tab. 4 dann sogar noch intuitiver als diejenigen aus Tab. 3 sind). So werden Darstellungen auf der Ebene von intuitiven Vorstellungen vernetzt, was einen stark verständnisorientierten Charakter hat. Im Folgenden erläutern wir die verschiedenen Umrechnungen des zweiten Zugangs jeweils exemplarisch am Beispiel der *natürlichen Häufigkeit* „1 von 4“ aus Tabelle 4:

(1) In der ersten Zeile (Tab. 4) soll „1 von 4“ in einen *gewöhnlichen Bruch* umgewandelt werden. Dieser Wechsel kann auf der Basis der Grundvorstellung zu *natürlichen Häufigkeiten* mithilfe der Bruch-Grundvorstellung *Teil eines Ganzen* (Padberg & Wartha 2017) erläutert werden. Alle möglichen Fälle sind jeweils als das Ganze zu verstehen (umrandet in der

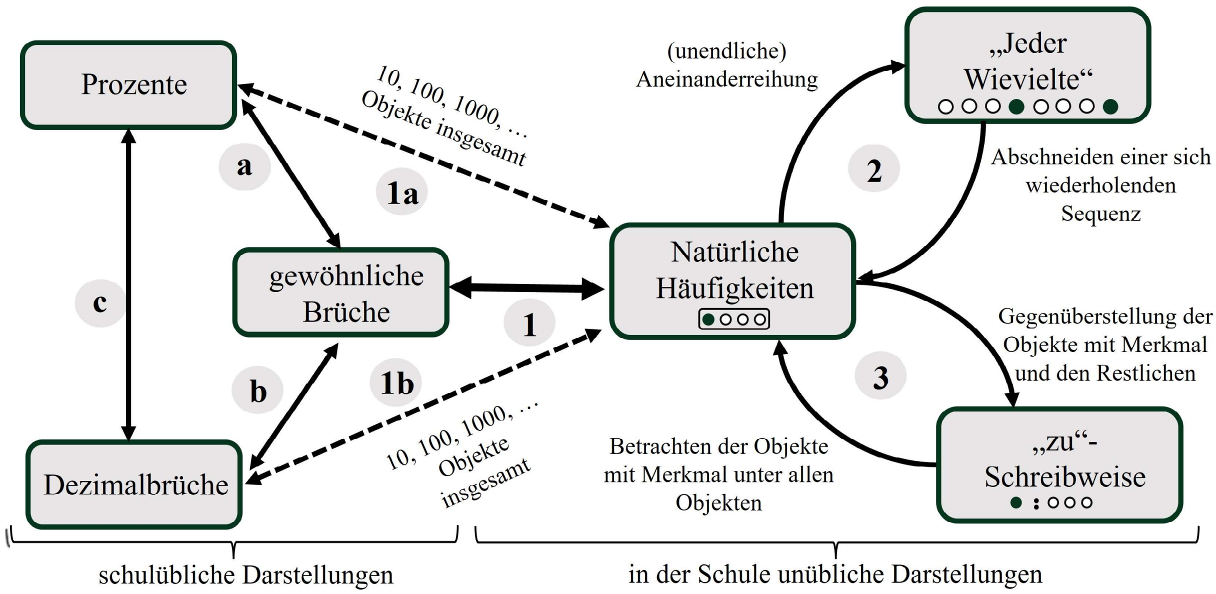


Abb. 3: Zugang 2 – Umrechnung über die Brücke der natürlichen Häufigkeiten und der gewöhnlichen Brüche

Abbildung), der „Teil“ besteht aus denjenigen Fällen mit einem bestimmten Merkmal.

(1a, b) Bei der Umrechnung der *natürlichen Häufigkeiten* in (a) *Prozente* bzw. (b) *Dezimalbrüche* sind zwei Wege möglich: Handelt es sich um ganzzahlige *Prozente*, bzw. *natürliche Häufigkeiten*, deren Gesamtmenge leicht als Zehnerpotenz dargestellt werden kann, bietet sich ein direkter Weg an (1a, 1b). Exemplarisch soll dies für die Gesamtmenge von 100 vorgestellt werden: Jeder der 100 Fälle entspricht dann genau einem Prozentpunkt oder 0,01. Umgekehrt entspricht jeder Prozentpunkt oder jede Hundertstelstelle genau einem Fall aus der Menge. Handelt es sich hingegen nicht um eine solche *Prozentangabe* oder *Dezimalbruch*, bietet sich der Weg über die *gewöhnlichen Brüche* (1) an (vgl. auch Zugang 1).

(2) Der Wechsel von der Darstellung der *natürlichen Häufigkeiten* zur Schreibweise *„Jeder Wievielte“* geschieht, indem die endliche Menge immer weiter aneinandergereiht wird. Man „zählt“ dann die Reihe ab und findet in regelmäßigen Abständen genau einen Fall mit dem Merkmal. Die Bedingung, dass der Ausdruck wertgleich zu einem Stammbruch sein muss, kann damit erklärt werden, dass die Abstände immer identisch sein müssen. Kann die natürliche Häufigkeit also nicht derart gekürzt werden, dass am Ende nur ein einziger Fall mit Merkmal übrig bleibt, kann kein regelmäßiger Abstand erzeugt werden (und zumindest der exakte Wert ist dann nicht in der *„Jeder Wievielte“-Schreibweise* darstellbar). Die Rückrichtung kann mit einer entsprechenden Abtrennung erklärt werden.

(3) Der Wechsel von den *natürlichen Häufigkeiten* zur *„zu“-Schreibweise* erfolgt, indem die Fälle mit Merkmal und ohne Merkmal getrennt betrachtet und gegenübergestellt werden. Als „Barriere“ wirkt hierbei der Doppelpunkt bzw. das Wort „zu“. Hier wird deutlich, dass der Doppelpunkt nicht als Rechenzeichen gedeutet werden soll – ein Aspekt, der unterrichtlich thematisiert werden sollte, um Verwechslungen vorzubeugen.

Umrechnung			**Erklärung am Beispiel „1 von 4“**		
1	natürliche Häufigkeit ⟷	gewöhnlicher Bruch	1 von 4 ●○○○	Objekte mit Merkmal als Zähler, Gesamtmenge als Nenner Zähler als Teil, Nenner als Ganzes	$\frac{1}{4}$
Spezialfall **1 a, b**	natürliche Häufigkeit ⟷	**a)** Prozent **b)** Dezimalbruch	1 von 4 entsprechen 25 von 100 ●○○○	Ein Prozentpunkt bzw. Hundertstel entspricht genau einem Fall	25 % 0,25
2	natürliche Häufigkeit ⟷	„Jeder Wievielte“	1 von 4 ●○○○	(unendliche) Aneinanderreihung Abschneiden einer sich wiederholenden Sequenz	Jeder Vierte ○○○●○○○●
3	natürliche Häufigkeit ⟷	„zu“ -Schreibweise	1 von 4 ●○○○	Gegenüberstellung der Objekte mit Merkmal und den Restlichen Betrachten der Objekte mit Merkmal unter allen Objekten	1 : 3 ● : ○○○

Tab. 4: Erklärung der Umrechnungen mit den natürlichen Häufigkeiten im Zentrum am Beispiel „1 von 4“

5 Fazit und Ausblick

Einen wichtigen Beitrag, damit Schülerinnen und Schüler kompetente und mündige Bürgerinnen und Bürger in der heutigen Gesellschaft werden, leistet die Ausbildung im Umgang mit statistischen Informationen wie beispielsweise relativen Häufigkeiten (Abb. 1). Das Verstehen und die flexible Handhabung numerischer Angaben von relativen Häufigkeiten bilden hierfür eine entscheidende Basis. Die Bedeutung der verschiedenen Darstellungsarten kann hierbei anschaulich mithilfe ikonischer Repräsentationen illustriert werden, die jeweils auf möglichen intuitive Grundvorstellungen aufbauen sollten.

Nach einer Motivation über drei empirische Studien (eine zum Vorkommen der Darstellungen in Alltag und Medien; Krauss et al. 2020; und zwei Examensarbeiten zu typischen Fehlern und Problemen bei entsprechenden Umrechnungen; Kümmeringer 2021; Roidl 2015) werden zur unterrichtlichen Implementation der wechselseitigen Umrechnungen in diesem Beitrag zwei Herangehensweisen vorgestellt: Bei beiden Zugängen spielen die *gewöhnlichen Brüche* eine gewichtige Rolle und in beiden Zugängen werden die für die Umrechnung nötigen Darstellungswechsel reduziert. Zugang 1, der die *gewöhnlichen Brüche* ins Zentrum stellt, ist gut für einen „schnellen Wechsel" geeignet, wenn die verschiedenen Schreibweisen bereits ausreichend verstanden werden. Darüber hinaus kann dieser Zugang als kompetenzorientierte Vertiefung der Bruchrechnung dienen. Zugang 2, ein eher verständnisorientierter Ansatz, eignet sich besonders bei der Einführung der verschiedenen Schreib- und Sprechweisen. Er betont die Vorstellung hinter den jeweiligen Darstellungsformen, um die Umrechnungsregeln auf intuitive Weise zu begründen. Auch bei Verständnisproblemen mit der Interpretation der Schreibweisen oder bei Schwierigkeiten mit dem Wechsel der Darstellungsformen ist Zugang 2 zu präferieren, da dort der Zusammenhang der Schreibweisen anschaulich erkennbar wird.

Für den kompetenten Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen (im Alltag) sollte man im späteren Verlauf unterschiedliche Aufgaben stellen, die auch über das reine Umrechnen hinausgehen. Zentrale Themenfelder, die ebenfalls die Medienkompetenz der Schülerinnen und Schüler stärken können, sind Größenvergleiche von Angaben („Wo sind mehr Personen betroffen? Bei jedem Vierten oder jedem Fünften"), das kritische Hinterfragen von medialen Angaben („Wieso kann folgende Zeitungsmeldung nicht stimmen?") oder auch die Verwendung der Angaben im Alltag. So sollte man die Schülerinnen und Schüler beispielsweise dafür sensibilisieren, dass im Alltag und in den Medien nicht alle Angaben mathematisch exakt umgerechnet werden. Vielmehr werden oft Näherungen verwendet, damit man einen Anteil in eine für den Leser leicht zugängliche Darstellungsform bringen kann. So ist es beispielsweise in Medien üblich „51 %" einfach als „Jeder Zweite" oder, „etwa jeder Zweite" darzustellen (vgl. Abb. 1). Eine umfangreiche Aufgabensammlung, die aus konkreten didaktischen Instruktionen für Schülerinnen und Schüler bezüglich zahlreicher fehlerhafter und unterhaltsamer Zeitungsmeldungen besteht, ist in Bruckmaier et al. (2016) zu finden.

Zukünftige Studien könnten nun untersuchen, mithilfe welcher Schritte Schülerinnen und Schüler die Umrechnungen am besten erlernen und wie nachhaltig die beiden vorgeschlagenen Zugänge sind. Weiterhin könnte auch empirisch ein Vergleich mit älteren Personen, die den Darstellungswechsel (vermeintlich) beherrschen, gezogen werden. Unterscheiden sich die beiden Gruppen in ihrem Vorgehen, wie erfolgreich sind sie mit ihren Strategien? Auch wäre eine interessante Fragestellung, ob sich die bei den Kompetenzen in der Prozentrechnung gängigen Geschlechtsunterschiede (Brunner et al. 2011) auch bei den anderen Darstellungsarten finden lassen.

Eine relevante Frage wäre auch, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Beherrschen der Bruchrechnung und der erfolgreichen Umrechnung der Darstellungsarten statistischer Informationen gibt. Wir hoffen, dass wir mit dem vorliegenden Beitrag in jedem Fall eine Forschungslücke verdeutlichen konnten und zu interessanter Anschlussforschung anregen.

Danksagung: Die Autorinnen und Autoren danken den Gutachtenden sowie Joachim Engel für konstruktive Kritik und Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Agra Europe (2021). Auf einen Beitragszahler kommen drei Rentenbezieher. https://www.topagrar.com/management-und-politik/news/auf-einen-beitragszahler-kommen-drei-rentenbezieher-12455278.html. Zugegriffen: 16.05.2022

Bruckmaier, G., Binder, K. & Krauss, S. (2016). Numerische Darstellungsarten statistischer Informationen. In: E.-M. Plackner & N. von Schroeders (Hrsg.), *Daten und Zufall.* (S. 47–76). Materialien für den Mathematikunterricht, 3. Hildesheim: Franzbecker.

Brunner, M., Krauss, S. & Martignon, L. (2011). Eine alternative Modellierung von Geschlechtsunterschieden in Mathematik. *Journal für Mathematikdidaktik, 32*(2), 179–204.

Deutsche Presse Agentur (dpa) (2022). dpa:221113-99-497714/3

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684–704.

Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematikdidaktik, 40*(1), 123–133.

Hagn, F. (2019). *Die Darstellung von Anteilen und Wahrscheinlichkeiten in audiovisuellen sowie in Printmedien – Eine quantitative sowie qualitative Querschnittsanalyse* (Unveröff. Examensarbeit). Universität Regensburg: Regensburg.

Heckmann, K. (2005). Von Euro und Cent zu Stellenwerten. Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses. *mathematica didactica, 28*(2), 71–87.

Kirsche, A. & Hohloch, L. (2020). Der Chancenstreifen – Ein didaktisches Hilfsmittel zur Erarbeitung des Begriffs „Chance" in der Primarstufe und zu Beginn der Sekundarstufe. *Stochastik in der Schule, 40*(1), 2–9.

Krauss, S. (2003). Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept". *Stochastik in der Schule, 23*(1), 2–9.

Krauss, S., Weber, P., Binder, K. & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematikdidaktik, 41*(2), 485–521.

Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe.* Berlin: Springer Spektrum.

Kümmeringer, T. (2021). *Numerische Darstellungsarten von Anteilswerten. Eine empirische Studie und eine Ausarbeitung eines schriftlichen Unterrichtsentwurfs* (Unveröff. Examensarbeit). Regensburg: Universität Regensburg.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren, 123*, 4–8.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung.* Freiburg: Herder.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. (S. 231–234). A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Weinheim: Beltz Verlag.

Rolfes, T. & Fahse, C. (2021). Schülerpräferenzen bezüglich numerischer Formate bei der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten. K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021.* Münster: WTM Verlag.

Roidl, S. (2015). *Eine Vergleichsstudie zum Thema Prozentrechnen: Können Hauptschüler in der 7. und 8. Klasse besser Prozentrechnen als Gymnasiasten?* (Unveröff. Examensarbeit). Universität Regensburg, Regensburg.

Süddeutsche Zeitung Magazin (2006). Ausgabe 01.01.2006.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung ISB. (2016). *LehrplanPLUS für das Gymnasium.* https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/6/mathematik. Zugegriffen: 19.10.2021

Weber, P. (2016). *Natürliche Häufigkeiten – Chancen und Grenzen aus fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Sicht* (Unveröff. Examensarbeit). Regensburg: Universität Regensburg.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37–46.

Anschrift der Verfassenden

Patrick Wiesner
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Patrick.Wiesner@ur.de

Karin Binder
Didaktik der Mathematik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Theresienstraße 39
80333 München
Karin.Binder@lmu.de

Stefan Krauss
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Stefan.Krauss@ur.de

Nicole Steib
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Nicole.Steib@ur.de

Celina Leusch
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Regensburg
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Celina.Leusch@stud.uni-regensburg.de

In der digitalen Version des Artikels wurden mit Zustimmung der Herausgeber Druckfehler in Abb. 3 sowie Tab.2 und Tab. 4 aus Heft 43(1) verbessert.